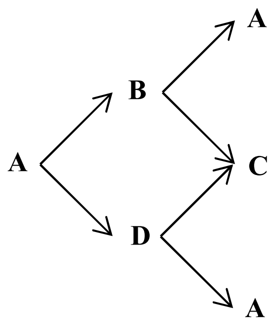
61

(1)

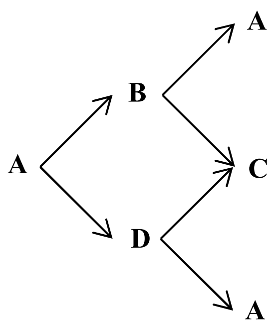
題意が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

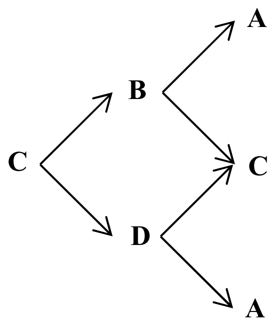
(i) $n=1$のとき



より，題意が成り立つ。

(ii) $n=k$のときAまたはCにいると仮定する。

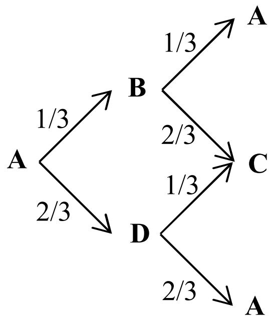


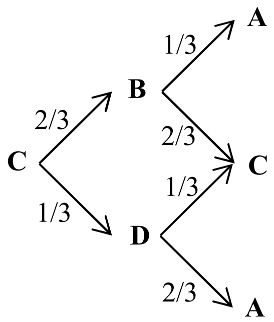


より，$n=k+1$のときもAまたはCにいる。

(i)，(ii)より，題意が成り立つことが証明された。

(2)





上図より，

$$a_{n+1}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}a_n+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)c_n=\frac{5}{9}a_n+\frac{4}{9}c_n \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

(1)より，$a_n+c_n=1$ ・・・②

①，②より，$a_{n+1}=\frac{5}{9}a_n+\frac{4}{9}(1-a_n)=\frac{1}{9}a_n+\frac{4}{9}$ $\therefore a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{9}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$ ・・・③

③は数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$が初項$a_0-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{9}$の等比数列であることを表している。

よって，$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ $\therefore a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$ ・・・④

また，④と②より，$c_n=1-a_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

以上より，$a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$，$c_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}$$